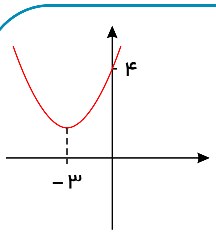
نام و نام خانوادگی: زمان برگزاری: ۱۸۰۰ دقیقه

نام آزمون: بی نام

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۰۸/۲۲ محمد حسین صابری

۱) اگر شکل روبرو نمایشی از سهمی $y=2x^2+bx+c$ باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲) اگر $(0,2)$ و $(2,0)$ دو نقطه از سهمی $y=ax^2+bx+c$ باشد، عرض نقطه $(1,y)$ کدام است؟

۱) $1-a$ ۲) $1-b$ ۳) $1-c$ ۴) صفر

۳) مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دومی صفر است؛ یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۴) کدام یک از معادله‌های زیر ریشه مضاعف دارد؟

۱) $4x^2-12x+9=0$ ۲) $3x^2+4x-2=0$ ۳) $x^2-2x+3=0$ ۴) $x^2+3x-2=0$

۵) عبارت $P(x)=6mx^2+2x-1$ همواره منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $m<0$ ۲) $m<-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{6}<m<0$ ۴) $m>-\frac{1}{6}$

۶) مجموعه جواب نامعادله‌ی $-1\leq 3x-2\leq 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ ۲) $-1\leq x\leq 1$ ۳) $-1\leq x\leq \frac{1}{3}$ ۴) $-2\leq x\leq 1$

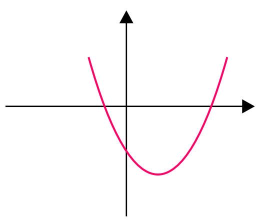
۷) جدول تعیین علامت عبارت $p=(2a-3)x+b-3$ به‌صورت روبه‌رو می‌باشد. اگر a عددی طبیعی باشد، مقدار $a-b$ برابر است با:

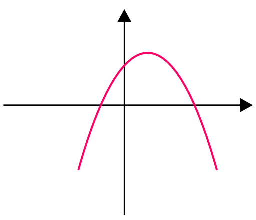
x		۱	
p	+	∘	−

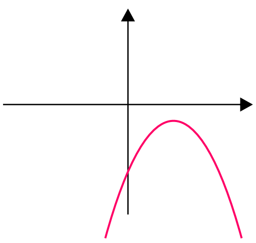
۱) -5 ۲) -3

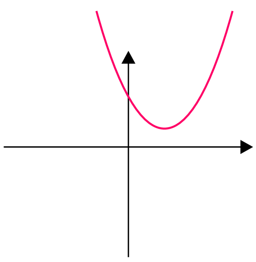
۳) ۳ ۴) ۵

۸) اگر $a>0$ و $b^2<ac$ باشد، نمودار سهمی $y=ax^2-2bx+c$ کدام می تواند باشد؟

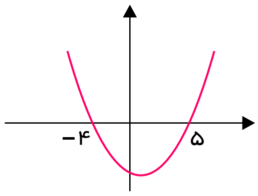
۱) 

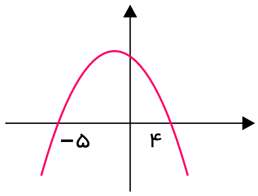
۲) 

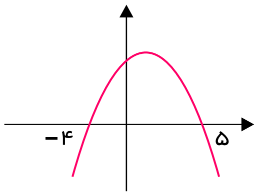
۳) 

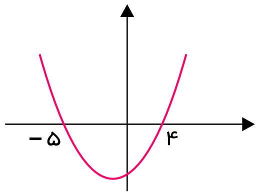
۴) 

۹) نمودار سهمی $y=۳(x+۵)(۴-x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰) به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$ فاقد ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-۳<m<۵$ ۲) $-۳<m<۴$ ۳) $-۲<m<۴$ ۴) $-۱<m<۵$

۱۱) اگر $(۱,۰)$ و $(۲,۴)$ و $(۳,۱۴)$ سه نقطه از سهمی $y=ax^۲+bx+c$ باشند، آنگاه $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

۱۲) به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲$ بالای محور xها و بر آن مماس است؟

۱) -۳ ۲) $\frac{-۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

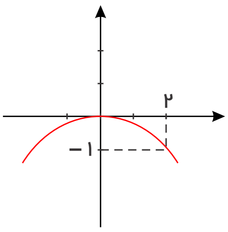
۱۳) نمودار سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲-۸x+۱$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۴) به ازای کدامین مقادیر m عبارت $(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$ به ازای هر مقدار x مثبت است؟

۱) $m<-۲$ ۲) $m>۲/۵$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $۱<m<۲/۵$

۱۵) اگر رأس سهمی مقابل را به نقطهٔ $(-۲,۳)$ انتقال دهیم، معادلهٔ کدام خواهد شد؟



۱) $y=-x^۲-۴x-۱$ ۲) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲-۲x+۱$

۳) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲-x+۲$ ۴) $y=\frac{۱}{۴}x^۲+۲x+۵$

پاسخنامه تشریحی

۱) ۴ **۳** ۲ ۱ باتوجه به نقطه‌ی رأس و $(۰,۴)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y=۲x^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,۴)}۴=۰+۰+c\Rightarrow c=۴ \\ \text{طول رأس}:\ \dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{-b}{۴}=-۳\Rightarrow -b=-۱۲\Rightarrow b=۱۲ \end{array}\right\}\Rightarrow b+c=۱۶$$

۲) ۴ ۳ ۲ **۱**

$$y=ax^۲+bx+c\begin{cases}\xrightarrow{(۰,۲)}۲=۰+۰+c\Rightarrow \boxed{c=۲} \\ \xrightarrow{(۲,۰)}۰=۴a+۲b+۲\Rightarrow ۲(۲a+b+۱)=۰\Rightarrow ۲a+b+۱=۰ \\ \xrightarrow{(۱,y)}y=a+b+۲\xrightarrow{+a}y+a=۲a+b+۲=\overbrace{۲a+b+۱}^{۰}+۱\Rightarrow y+a=۱\Rightarrow y=۱-a\end{cases}$$

۳) **۴** ۳ ۲ ۱

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه‌ها $x=۱$ است.

$$ax^۲+bx+c=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}x=۱ \quad \text{:یکی از ریشه‌ها}$$

۴) ۴ ۳ ۲ **۱** پاسخ: وقتی $\Delta=۰$ شود معادله ریشه مضاعف خواهد داشت.

۱) $\Delta=۱۴۴-۴(۴)(۹)=۱۴۴-۱۴۴=۰\rightarrow$ ریشه مضاعف : $(۲x-۳)^۲=۰\ \Rightarrow\ x=\dfrac{۳}{۲}$

۲) $\Delta=۱۶-۴(۳)(-۲)=۱۶+۲۴=۴۰>۰$ دو جواب

۳) $\Delta=۴-۴(۱)(۳)=۴-۱۲=-۸<۰$ جواب ندارد

۴) $\Delta=۹-۴(۱)(-۲)=۹+۸=۱۷>۰$ دو جواب

۵) ۴ ۳ **۲** ۱ برای این‌که عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی و Δ هم منفی باشد. پس:

$$۶m<۰\Rightarrow m<۰$$

$$\Delta=۴+۲۴m<۰\Rightarrow ۲۴m<-۴\Rightarrow m<-\frac{۱}{۶}$$

بنابراین به‌ازای $m<-\frac{۱}{۶}$ عبارت موردنظر همواره منفی است.

۶) ۴ ۳ ۲ **۱**

$$-۱\le ۳x-۲\le ۱\xrightarrow{+۲}۱\le ۳x\le ۳\xrightarrow{\div ۳}\frac{۱}{۳}\le x\le ۱$$

۷) ۴ ۳ **۲** ۱ ضریب جملهٔ درجه اول باید منفی باشد، پس:

$$۲a-۳<۰\Rightarrow a<\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a\in\mathbb{N}}a=۱$$

ضمناً عدد یک ریشهٔ این عبارت است:

$$(۲a-۳)\times ۱+b-۳=۰\Rightarrow ۲a+b=۶\xrightarrow{a=۱}b=۴\Rightarrow a-b=-۳$$

۸) **۴** ۳ ۲ ۱ $a>۰$ پس دهانهٔ سهمی روبه بالا باز می شود، ضمناً:

$$\Delta=(-۲b)^۲-۴ac=۴b^۲-۴ac=۴(b^۲-ac)$$

با توجه به این‌که $b^۲<ac$، پس $\Delta<۰$ و سهمی محور طول‌ها را قطع نمی‌کند و فقط گزینهٔ ۴ ممکن است نمودار این سهمی باشد.

۹) ۴ ۳ **۲** ۱ سهمی مورد نظر از دو نقطهٔ $(۴,۰)$ و $(-۵,۰)$ می‌گذرد. با توجه به مقدار $a=-۳<۰$ تنها گزینهٔ ۲ می‌تواند نمودار این سهمی باشد.

۱۰) ۴ ۳ ۲ **۱** شرط آنکه معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$ فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰\Rightarrow (m+۱)^۲-۴(۲)(\frac{۱}{۲}m+۲)=(m^۲+۲m+۱)-۴m-۱۶$$

$$=m^۲-۲m-۱۵=(m-۵)(m+۳)<۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر پاسخ مسئله بازهٔ $(-۳,۵)$ است:

m	$-\infty$		-۳		۵		$+\infty$
$(m-۵)(m+۳)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow -۳<m<۵$

۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

راه اول:

نقاط در معادله سهمی صدق می کنند. داریم :

$$y=ax^۲+bx+c\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{(۱,۰)} ۰=a+b+c \\ \xrightarrow{(۲,۴)} ۴=۴a+۲b+c \end{array}\right\} \Rightarrow ۳a+b=۴ \quad (I)$$

$$y=ax^۲+bx+c\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{(۲,۴)} ۴=۴a+۲b+c \\ \xrightarrow{(۳,۱۴)} ۱۴=۹a+۳b+c \end{array}\right\} \Rightarrow ۵a+b=۱۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} \left\{\begin{array}{l} ۳a+b=۴ \\ ۵a+b=۱۰ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -۳a-b=-۴ \\ ۵a+b=۱۰ \\ \hline ۲a=۶ \Rightarrow \boxed{a=۳} \end{array}\right.$$

$$۳a+b=۴ \xrightarrow{a=۳} ۹+b=۴ \Rightarrow \boxed{b=-۵}$$

$$a+b+c=۰ \Rightarrow ۳+(-۵)+c=۰ \Rightarrow \boxed{c=۲}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c}=\frac{-۵+۳}{۲}=-۱}$$

راه دوم:

$$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{(۱\ ,\ ۰)} a+b+c=۰ \Rightarrow a+b=-c$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-۱$$

۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴) وقتی نمودار بالای محور xها و بر آن مماس است یعنی ریشه‌ی مضاعف دارد ،بنابراین:

$$y=(m-۲)x^۲-۳x+m+۲\geq ۰$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=۰ \Rightarrow ۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰ \\ a\geq ۰ \Rightarrow m-۲\geq ۰ \Rightarrow m\geq ۲ \quad (I) \end{array}\right.$$

$$۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰ \Rightarrow ۹-۴(m^۲-۴)=۰ \Rightarrow ۹-۴m^۲+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow -۴m^۲+۲۵=۰ \Rightarrow -۴m^۲=-۲۵ \Rightarrow ۴m^۲=۲۵ \Rightarrow m^۲=\frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=\frac{۵}{۲} \\ m=-\frac{۵}{۲} \end{array}\right. \xrightarrow[(I)]{m\geq ۲} m=\frac{۵}{۲}$$

۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

اگر ضریب $x^۲$ در معادله یک سهمی مثبت باشد آنگاه سهمی قطعاً از ناحیه اول و دوم می‌گذرد. اگر ضریب $x^۲$ در معادله یک سهمی منفی باش آنگاه سهمی قطعاً از ناحیه سوم و چهارم می‌گذرد.

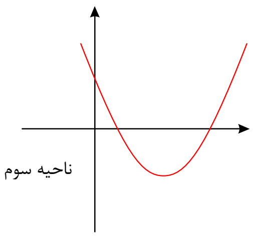
در سهمی $y=۲x^۲-۸x+۱$ ضریب $x^۲$ مثبت است. پس از ناحیه اول و دوم می‌گذرد اکنون نقطه‌های برخورد سهمی با محور x ها را بررسی می‌کنیم:

$$y=۲x^۲-۸x+۱ \xrightarrow{y=۰} ۲x^۲-۸x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{(-۸)^۲-۴\times ۲\times ۱}}{۲\times ۲}$$

$$=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴-۸}}{۴}=\frac{۸\pm\sqrt{۵۶}}{۴}$$

$$۵۶<۶۴ \Rightarrow \sqrt{۵۶}<۸ \Rightarrow ۰<۸-\sqrt{۵۶} \Rightarrow ۰<\frac{۸-\sqrt{۵۶}}{۴}$$

هر دو ریشه مثبت‌اند و سهمی از ناحیه ۳ نمی‌گذرد.



۱۴ (۴) (۳) **(۲)** (۱)

حاصل یک عبارت درجه‌ی ۲ وقتی همواره مثبت است که Δ منفی و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$(m-1)x^2+6x+2m+1>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ \Delta<0 \Rightarrow 6^2-4(m-1)(2m+1)<0 \Rightarrow 36-4(2m^2-m-1)<0 \\ \Rightarrow -8m^2+4m+40<0 \end{cases}$$

پس ابتدا ریشه‌های $-8m^2+4m+40$ را بدست می‌آوریم سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-8m^2+4m+40=0 \xrightarrow{\div 4} -2m^2+m+10=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-2)\times 10}}{2\times(-2)}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{-4}=\frac{-1\pm 9}{-4} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{-1-9}{-4}=\dfrac{5}{2} \\ m=\dfrac{-1+9}{-4}=-2 \end{cases}$$

m		1		$\frac{5}{2}$	
$-8m^2+4m+40$			$+$	0	$-$

$$\Rightarrow m>\frac{5}{2}$$

۱۵ (۴) **(۳)** (۲) (۱) رأس در نقطه‌ی $(0,0)$ قرار دارد. پس معادله‌ی آن به صورت $y=ax^2$ است، که از نقطه‌ی $(2,-1)$ نیز می‌گذرد.

$$y=ax^2 \xrightarrow{(2,-1)} -1=a(2)^2 \Rightarrow -1=4a \Rightarrow a=\frac{-1}{4} \Rightarrow y=\frac{-1}{4}x^2$$

اگر سهمی را انتقال دهیم معادله‌ی آن را به صورت $y=\frac{-1}{4}x^2+bx+c$ فرض می‌کنیم. مختصات نقطه رأس سهمی جدید $(-2,3)$ است، پس خط $x=-2$ محور تقارن آن است.

$$-\frac{b}{2a}=-2 \xrightarrow{a=-\frac{1}{4}} -\frac{b}{-\frac{1}{2}}=-2 \Rightarrow -b=1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2-x+c$$

$$\xrightarrow{(-2,3)} 3=\frac{-1}{4}(-2)^2-(-2)+c \Rightarrow 3=-1+2+c \Rightarrow c=2 \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2-x+2$$

بی‌نام

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳
۲	۱
۳	۴
۴	۱
۵	۲
۶	۱
۷	۲
۸	۴
۹	۲
۱۰	۱
۱۱	۲
۱۲	۳
۱۳	۳
۱۴	۲
۱۵	۳