

جایگشت

مدرس: محمدحسین صابری

مؤلف و مدرس ریاضی کنکور



درسنامه

این کلمه از دو حرف **جای** و **گشت** تشکیل شده است:



جابه‌جا کردن

موقعیت

در واقع می‌خواهیم n شی را در کنار هم **جابه‌جا کنیم** و تعداد حالت‌هایی که رخ می‌دهد را **بشماریم**.

در حالت کلی مسائل جایگشت به چهار دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱- جایگشت خطی  ۲- جایگشت یک در میان

۳- جایگشت کنار هم بودن یا نبودن  ۴- جایگشت تقدم و تأخر

۱- **جایگشت خطی**: حالت‌هایی که n شی متمایز روی یک خط کنار هم قرار می‌گیرند

برابر $n!$ است: $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

این هم دلیلش: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ و $2! = 2 \times 1 = 2$ و $1! = 1$ و $0! = 1$

$$\frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x} \times \frac{n-2}{x} \times \dots \times 1 = n!$$

$$\boxed{a, b, c} \quad \frac{3}{a} \times \frac{2}{b} \times 1 = 6 \quad | \quad 3! = 6$$



جایگشت

• مثال آموزشی (۱)

PRICE

با حروف کلمه "PRICE"

الف) چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت؟
 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) چند کلمه پنج حرفی می توان نوشت که با حروف صدادار شروع شود؟

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline P \\ \hline 3 \\ \hline R \\ \hline 2 \\ \hline I \\ \hline 1 \\ \hline E \end{array} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline I \\ \hline 1 \\ \hline E \end{array} = 2 \times 1 = 2$$

• تست آموزشی (۱)

- چند جایگشت چهار حرفی از حروف کلمه "MARKET" به حرف بی صدا ختم می شود؟

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline M \\ \hline 3 \\ \hline R \\ \hline 2 \\ \hline K \\ \hline 1 \\ \hline T \end{array} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$



۲- جایگشت یک در میان: اگر بخواهیم اعضای دو گروه یک در میان در یک صف کنار

هم قرار بگیرند؛ دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: تعداد اعضای دو گروه با هم مساوی باشند:

(جایگشت‌های اعضای گروه B) \times (جایگشت‌های اعضای گروه A) $\times 2 =$ تعداد جایگشت‌ها

حالت دوم: تعداد اعضای دو گروه یک واحد اختلاف داشته باشند:

(جایگشت‌های اعضای گروه B) \times (جایگشت‌های اعضای گروه A) = تعداد جایگشت‌ها

• مثال آموزشی (۲)

به چند طریق می‌توان سه زن و چهار مرد را یکی در میان کنار هم قرار داد؟

یک واحد اختلاف

$$3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$$



- با جابه جایی ارقام عدد «۴۳۵۴۴۷» چند عدد شش رقمی می توان نوشت که

{ ۴۴۴۴ } و { ۳, ۵, ۷ }
۲۱۶ (۴)

رقم های ۴ یکی در میان باشند؟

۲ (۲)

۱۲ (۱)

$$۲ \times ۳! \times ۱ = ۱۲$$

$$۲ \times \frac{۳!}{۲} \times \frac{۳!}{۲} = ۷۲$$

۳- جایگشت کنار هم بودن یا نبودن: هر گاه بخواهیم در یک جایگشت، اشیاء خاص

کنار هم قرار بگیرند، آنها را در یک بسته قرار می دهیم و یک شی در نظر می گیریم. در

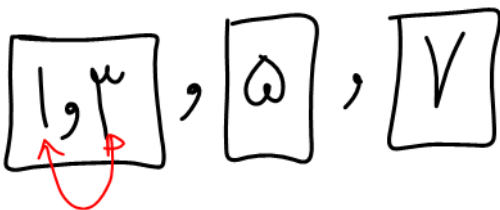
نهایت جایگشت شی جدید را با سایر اشیا به دست می آوریم.

• تذکر

مواستان به جایگشت اعضای داخل بسته باشد.

برای مثال می فوایم جایگشت ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۱ به دست آوریم که دو رقم ۱ و ۳ دقیقاً کنار هم

باشند. ببینید:



$$۳! \times ۲! = ۲ \times ۲ = ۴$$



• مثال آموزشی (۳)

- در چند جایگشت از حروف کلمه "OMRAN" حروف صدادار کنار هم هستند؟



$$\cancel{4!} \times 2! = 2! \times 2! = 4! = 24$$

• تست آموزشی (۳)

- به چند طریق می توان ^Z ۳ کتاب ریاضی، ^S ۲ کتاب شیمی و ^R ۴ کتاب زیست را کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های شیمی دو طرف ریاضی ها قرار بگیرند؟ (همه کتاب ها متمایزند)



۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰ (۳) ۱۲۶۰ (۲) ۲۸۸ (۱)

$$5! \times 4! \times 4! = 120 \times 24 \times 24 = 720$$



۴- جایگشت تقدم و تأخر: فرض کنید n شی متمایز داریم که می خواهیم بین r تا از

آنها ترتیب خاصی باشد. تعداد جایگشت های مورد نظر برابر $\frac{n!}{r!}$ می باشد.

• مثال آموزشی (۴)

۵ نفر در یک سخنرانی شرکت کرده اند. در چند حالت:

$$\frac{5!}{2!} = 60 \quad n=5 \text{ و } r=2$$

الف) فرد a قبل از b سخنرانی می کند.

ب) فرد a قبل از b و فرد b قبل از c سخنرانی کند.

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \quad n=5 \text{ و } r=3$$

• تست آموزشی (۴)

۶ نفر می خواهد وارد یک ساختمان شوند. در چند حالت علی قبل از محمد و $r=3$ $n=6$

محمد قبل از مهران وارد ساختمان می شوند؟

۱۲۰ (۴) ✓

۲۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۷۲۰ (۱)

$$\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$



اصل متمم: گاهی اوقات تعداد حالت‌هایی که مدنظرمان است خیلی زیاد هستند و شمارش آنها سخت است. در این حالات سراغ اصل متمم می‌رویم. این اصل می‌گوید:

$$\text{تعداد حالت‌های نامطلوب} - \text{تعداد کل حالات} = \text{تعداد حالت‌های مطلوب}$$

• مثال آموزشی (۵)

تعداد اعداد سه رقمی که در آن حداقل یک عدد ۴ استفاده شده باشد را بیابید.

اعداد ۳ رقمی که ندارند - کل اعداد ۳ = اعداد ۳ رقمی که حداقل یکی ۴ دارد

$$\frac{9}{\text{به جز ۴}} \times \frac{10}{\text{رقم}} \times \frac{10}{\text{به جز ۴}} = 900$$

$$\frac{9}{\text{به جز ۴}} \times \frac{9}{\text{به جز ۴}} \times \frac{9}{\text{به جز ۴}} = 729$$

$$900 - 729 = 171$$

• تست آموزشی (۵)



- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه "PEDRAM" که حرف‌های P و M کنار هم نباشند، کدام است؟

$$\begin{array}{r} 2760 \\ - 240 \\ \hline 2520 \end{array}$$

نباشند، کدام است؟

۱۲۰ (۴)

۵۲۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۴۸۰ (۱)

کنار هم نباشند = کل - کنار هم باشند

$$5! - 4! = 120$$

M, P, E, D, R, A

$$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$